Выполнил: Киселёв Илья. ИО-511

**Принцип наименьшего действия в механике.**

Принцип наименьшего действия Гамильтона – способ получения уравнения движения физической системы при помощи поиска стационарного значения специального функционала – действия. Назван в честь Уильяма Гамильтона, использующего этот принцип для построения гамильтонова формализма в классической механике. Принцип стационарности действия — наиболее важный среди семейства экстремальных принципов. Не все физические системы имеют уравнения движения, которые можно получить из этого принципа, однако все фундаментальные взаимодействия ему подчиняются, в связи с чем этот принцип является одним из ключевых положений современной физики. Получаемые с его помощью уравнения движения имеют название уравнений Эйлера — Лагранжа.

В классической механике уравнение движения следует из принципа наименьшего действия. Если q – конечный набор конфигурационных переменных , а – соответствующие скорости в момент времени t, то действие определяется следующим образом

функция Лагранжа данной системы.

Функция Лагранжа зависит от координат, скоростей, а в некоторых случаях явно и от времени для незамкнутых систем. Т. е. для систем, подверженных действию внешних сил. Принцип Наименьшего действия гласит, что среди всех траекторий , проходящих через положения в момент времени , физическая траектория дает стационарное значение действия. Это стационарное значение является единственных минимум, если достаточно близки друг к другу. Поэтому действие стоит рассматривать как функционал от всех регулярных функций , удовлетворяющих граничным условиям. Этот принцип может не выполняться для всей траектории в целом, он может оказаться справедливым лишь для каждого из достаточных малых участков траекторий, а для всей траектории интеграл может иметь лишь экстремальное, не обязательно минимальное значение. Но при выводе уравнения движения используется только условие экстремальности. Если Q(t) – истинная траектория, то близкая к ней траектория запишется как . Разлагая действие по степеням в виде

;

Принцип наименьшего действия можно записать следующим образом

Чтобы сравнить это выражение с уравнение Эйлера-Лагранжа, заметим, что,

Необходимым условием экстремальности интеграла является обращение в 0 его первой вариации: , причем все функций , должны варьироваться независимо. Составляющая вариацию по варьируемой функции:

,

Так как ,проинтегрируем по частям:

Первый член в соотношении исчезает остается интеграл, который должен быть равен 0 при произвольных значения , значит система уравнений Лагранжа ( система из дифференциальных уравнений второго порядка для неизвестных функций , общее уравнение содержит неизвестных, нужно знать значения координат и скоростей в начальный момент времен). Для получения уравнения движения механической системы необходимо построить функцию Лагранжа этой системы.

В простейших случаях величина L представляет собой разность между кинетической энергией, квадратичной по скоростям, и потенциальной энергией. Уравнение не изменяется, если к величине L добавить полную производную по времени (), при этом действие изменится лишь за счет вкладов, зависящих от граничных условий. Так же, если рассматривать две не взаимодействующие системы как одну, то функция Лагранжа полученной равно .

ПНД — фундаментальный принцип, позволяющий получить уравнения движения системы, для которой определена функция Лагранжа

**Уравнения Лагранжа-Эйлера.**

Для стационарных траекторий вариация функционала  .  
  
Метод нахождения стационарных функций (не только для принципа наименьшего действия, но и для многих других задач) нашли два математика — Эйлер и Лагранж. Стационарная функция, чей функционал выражается интегралом, подобным интегралу действия, должна удовлетворять определенному уравнению, которое называется уравнением Эйлера-Лагранжа.

Уравнения Эйлера — Лагранжа - являются основными формулами вариационного исчисления, c помощью которых ищутся стационарные точки и экстремумы функционалов. Использование уравнений Эйлера — Лагранжа для нахождения экстремума функционала в некотором смысле аналогично использованию теоремы дифференциального исчисления, утверждающей, что лишь в точке, где первая производная функции обращается в ноль, гладкая функция может иметь экстремум (в случае векторного аргумента приравнивается нулю градиент функции, то есть производная по векторному аргументу). Точнее говоря, это прямое обобщение соответствующей формулы на случай функционалов — функций бесконечномерного аргумента.

Если – пусть в мерном пространстве, то он доставляет экстремум функционалу

только если удовлетворяет условию .

В физических приложениях, когда является лагранжианом, эти уравнения – классические уравнения движения такой системы. Это утверждение может быть прямо обобщено и на случай бесконечномерного .

**Вывод закона сохранения импульса из принципа наименьшего действия и однородности пространства.**

Закон сохранения импульса вытекает из однородности пространства. В силу этой однородности свойства замкнутой системы не меняются при любом параллельном переносе системы как целого в пространстве. Однородность пространства относительно замкнутой механической системы означает неизменность свойств системы при любом ее параллельном переносе как целого , где – некоторый постоянный вектор сдвига. В декартовой системе координат тогда параллельный перенос означает преобразование, при котором все точки системы, задаваемые радиус-векторами , смещаются на один и тот же вектор Это означает, что вид функции Лагранжа не изменится при подстановке (1):

.

В силу независимости от получаем: (2). Суммируя левые и правые части уравнения Лагранжа (()) и учитывая (2 , тогда . Таким образом, в замкнутой системе векторная величина (полный импульс системы) остается неизменной при движении. Аддитивность импульса очевидна, и имеет место, не зависимо от взаимодействия частиц системы: ;где -импульс i-ой материальной точки: ; Закон сохранения всех трех компонент вектора импульса выполняется лишь в замкнутой системе, т. е. в отсутствии внешнего поля. Однако отдельные компоненты импульса могут сохраняться и при наличии поля. Например, если однородное поле направлено вдоль оси z (потенциальная энергия в этом поле зависит от z-й координаты), то сохраняются компоненты импульса вдоль осей x и y: =const и = const, а не является интегралом движения. Отметим, что выражение имеет простой физический смысл. Это равенство означает, что сумма сил , действующих на все частицы замкнутой системы равна нулю (для двух частиц это дает – третий закон Ньютона, т.е. равенство действия и противодействия).